Exercices de probabilités (parfois) corrigés

Y. VILLESSUZANNE
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~villessu/svt.html

3 décembre 2005

1 Terminologie

Exercice 1 On considère l'événement A « tirer un as » d'un jeu de 52 cartes. Expliciter l'ensemble fondamental Ω, l'événement A.

Exercice 2 On jette deux dés (à 6 faces). Soit A_0 l'événement « la somme des points est paire », A_1 l'événement « la somme des points est impaire » et B l'événement « la valeur absolue de la différence des points est égale à 4 ».

Combien comptez-vous d'événements élémentaires dans $A_0 \setminus B$, dans $A_1 \setminus B$?

Exercice 3 Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Déterminer tous les événements contenant à la fois c et d.

2 Probabilités élémentaires

Exercice 4 L'irradiation par les rayons X de vers à soie induit certaines anomalies. La probabilité d'une anomalie particulière est $p = \frac{1}{10}$.

i. Quelle est la probabilité de trouver au moins un embryon présentant cette anomalie, sur dix disséqués ?
ii. Combien faut-il en disséquer pour trouver au moins une anomalie avec une probabilité supérieure à 50% ? à 95% ?

Solution $65{,}13\%$. $n \geqslant 7$. $n \geqslant 29$.

Exercice 5 D'après les statistiques, un piéton marchant sur la bande d'arrêt d'urgence d'une autoroute a une probabilité de 8% d'être renversé par une voiture chaque minute. Monsieur X, quelque peu atteint, a décidé de faire avec un ami le pari stupide suivant : s'il réussit à marcher un quart d'heure sur la bande d'arrêt d'urgence sans être victime d'un accident, son ami lui devra 200 Euros.

Quelle est la probabilité pour que monsieur X s'en sorte idemne ? À combien estime-t-il sa vie ?

Solution $28{,}63\%$. 80 Euros et 23 centimes... No comment.

Exercice 6 On jette plusieurs fois un dé à 6 faces non truqué. Combien de lancers faut-il faire pour obtenir (au moins) un as avec une probabilité de 50% ? de 99% ?

Solution $n \geqslant 4$. $n \geqslant 26$.

Exercice 7 Un professeur décide de faire passer rapidement l'oral de « probabilités ». L'étudiant est autorisé à répartir quatre boules, deux blanches et deux noires, entre deux urnes. Le professeur choisit au hasard une des urnes et en extrait une boule. Si la boule est noire, l'étudiant est reçu.

Comment répartiriez-vous les boules ?

Solution Une boule noire dans la première urne, les autres boules dans la seconde, ce qui donne une probabilité de $2/3$ de passer l'oral.

Exercice 8 On plombe un dé à 6 faces de sorte que la probabilité d'apparition d'une face donnée est proportionnelle au nombre de points de cette face. On lance le dé deux fois.

Quelle est la probabilité d'obtenir une somme des points égale à 4 ?

Exercice 9 Un jeu consiste à lancer une pièce (diamètre 3 cm) sur une table quadrillée par des carrés de 4 cm de côtés. On gagne si la pièce tombe entièrement à l'intérieur d'un carré.

i. Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

ii. En cas de gain, le joueur reçoit 15 fois sa mise. Ce jeu est-il honnête ?

Solution $1/16$. Non.

2.1 Combinatoire

Exercice 10 Un appareil contient 6 transistors dont 2 exactement sont défectueux. On les identifie en testant les transistors l'un après l'autre. Le test s'arrête quand les 2 transistors défectueux sont trouvés.

Calculer la probabilité pour que le test :

i. soit terminé au bout de 2 opérations ;

ii. nécessite strictement plus de 3 opérations.

Solution $1/15$. $4/5$.

Exercice 11 Dans une course de 20 chevaux, quelle est la probabilité, en jouant 3 chevaux, de gagner le tiercé dans l'ordre ? dans l'ordre ou le désordre ? dans le désordre ?

Solution $1/6840$. $1/1140$. $1/1368$.

Exercice 12 Au Loto, on doit cocher 6 cases dans une grille comportant 49 numéros. Quelle est la probabilité de gagner le gros lot (c'est-à-dire d'avoir les 6 bons numéros) ?

On gagne quelque chose à partir du moment où l'on a au moins 3 bons numéros. Avec quelle probabilité cela arrive-t-il ?

En fait, on peut aussi (en payant plus cher) cocher 7, 8, 9 ou même 10 numéros sur la grille. Dans chacun des cas, quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?

Exercice 13 On choisit au hasard un comité de quatre personnes permi huit américains, cinq anglais et trois français. Quelle est la probabilité :

- qu'il ne se compose que d'américains ?
- qu'aucun américain ne figure dans ce comité ?
- qu'au moins un membre de chaque nation figure dans le comité ?

Solution $1/26$. $1/26$. $3/7$.

Exercice 14 (dur) Dans une classe de n élèves, quelle est la probabilité pour que deux étudiants au moins aient même anniversaire ?

Quel est le nombre minimum de personnes dans le groupe pour que cette probabilité soit d'au moins 50% ? de 90% ?

Solution $1-\frac{365\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$. 23. 41.

Exercice 15 Alice, Bob, Charly et Denis jouent au bridge, et reçoivent chacuns 13 cartes d'un (même) jeu de 52 cartes.

Sachant qu'Alice et Charly ont à eux deux 8 Piques, on en déduit que Bob et Denis ont 5 Piques à eux deux. Quelle est la probabilité pour que les Piques soient « bien répartis », i.e., pour que la répartition des 5 Piques soit $3-2$ ou $2-3$ entre Bob et Denis ?

Solution $78/115 \simeq 67,8\%$.

Exercice 16 (inclusion-exclusion) Une école d'ingénieur propose à ses 320 étudiants deux cours de mathématiques, un en analyse, et un en probabilités. On sait qu'il y a 140 étudiants qui choisissent l'analyse, 170 qui n'assistent pas au cours de probabilités, et 190 qui suivent exactement un cours de mathématiques.

On choisit un étudiant au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il ne suive pas les deux cours de mathématiques ? Qu'il suive au moins un cours de mathématiques ? Qu'il suive l'analyse mais pas les probabilités ?

Solution $27/32$. $3/4$. $9/32$.

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 17 Un étudiant, Ulysse, sort habituellement le vendredi soir, avec une probabilité $2/3$. Or ce jour-là, il y a justement un devoir de mathématiques le lendemain matin. On suppose qu'Ulysse réussit à avoir la moyenne avec une probabilité de $3/4$ s'il n'est pas sorti la veille, et de seulement $1/2$ dans le cas contraire.

Sachant qu'Ulysse n'a pas obtenu la moyenne, quelle est la probabilité pour qu'il soit sorti la veille ?

Solution $4/5 = 80\%$.

Exercice 18 Un nouveau test de dépistage d'une maladie rare et incurable, touchant environ une personne sur 100000, vient d'être mis au point. Pour tester sa validité, on a effectué une étude statistique : sur 534 sujets sains, le test a été positif 1 seule fois, et, sur 17 sujets malades, il a été positif 16 fois.

Une personne effectue ce test, et le résultat est positif. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit atteinte de cette maladie ?

Faut-il commercialiser ce test ?

Solution À peine $0,5\%$!

Solution détaillée On note M l'événement « être malade », et T celui « avoir un test positif ». L'énoncé se traduit par $\mathbb{P}(M) = 1/100000$, $\mathbb{P}(T|M) = 16/17$, et $\mathbb{P}\left(T|\overline{M}\right) = 1/534$.

Comme $\left\{M, \overline{M}\right\}$ est une partition de Ω, on peut appliquer la formule de Bayes (ou faire un arbre) :

$$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(T|M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T|M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T|\overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)}$$

Il ne reste plus qu'à faire l'application numérique.

Exercice 19 Loïc joue au Loto ; s'il gagne, il part aux Seychelles pour un mois complet à coup sûr. S'il perd, il ne partira probablement pas (seulement avec une probabilité de $1/10000$).

Quelle est la probabilité pour que Loïc parte aux Seychelles demain ?

Sachant qu'il est parti aux Seychelles, quelle est la probabilité qu'il ait gagné au Loto ?

Solution $0,010007\%$. $0,0715\%$.

Solution détaillée Notons S l'événement « Loïc part aux Seychelles », et et L « Loïc gagne au Loto ». On a déjà vu (c'est du dénombrement élémentaire) que $\mathbb{P}(L) = 1/\binom{49}{6} = 1/13983816$. De plus, l'énoncé se traduit par : $\mathbb{P}(S|L) = 1$, et $\mathbb{P}\left(S|\overline{L}\right) = 1/10000$.

Comme $\left\{L, \overline{L}\right\}$ est une partition de Ω, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \wedge L) + \mathbb{P}\left(S \wedge \overline{L}\right) = \mathbb{P}(S|L)\,\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}\left(S|\overline{L}\right)\mathbb{P}\left(\overline{L}\right)$$

On trouve $\mathbb{P}(S) = 0.0001000715$.

Ensuite, il faut calculer (on pourrait aussi appliquer la formule de Bayes) :

$$\mathbb{P}(L|S) = \frac{\mathbb{P}(L \wedge S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|L)\,\mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(S)}$$

Et l'on trouve $\mathbb{P}(L|S) = 0.000715$.

Exercice 20 Trois personnes (Alduire, Basilis et Cléophie) jouent à la roulette russe de la façon suivante : on fait tourner une fois le barillet au début, puis chacun appuie sur la détente à son tour (Alduire, puis Basilis, puis Cléophie).

Préféreriez-vous être à la place d'Alduire, de Basilis ou de Cléophie ? *(Bien sûr, le mieux est encore de ne pas jouer à ce jeu stupide...)*

Solution Ils ont tous les trois la même chance de perdre...

Exercice 21 Trois machines A, B et C fournissent respectivement 50%, 30% et 20% de la production d'une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Quelle est la probabilité qu'une pièce, prise au hasard dans la production, soit défecteuse ?

Quelle est la probabilité pour qu'une pièce défectueuse prise au hasard provienne de A ? de B ? de C ?

Solution 41%, 32% et 27% respectivement.

Exercice 22 Alice et Bob jouent aux fléchettes. À chaque manche, Alice gagne avec une probabilité p.

La partie se déroule en deux manches gagnantes. Quelle est la probabilité p' pour que Alice gagne ?

Quand a-t-on $p' < p$, $p' = p$, $p' > p$? Commenter le résultat.

Solution $p' = p^2(3 - 2p)$. Selon que $p < 1/2$, $p = 1/2$ ou $p > 1/2$.

Exercice 23 (réfléchir !) Hildebert joue à un jeu télévisé. Il a face à lui, trois portes (A, B et C) identiques ; derrière l'une d'entre elle se trouve le gros lot, mais derrière les deux autres, rien du tout.

Hildebert choisit une des portes (disons, la A), et alors le présentateur (qui connaît la porte gagnante) ouvre une autre porte (disons, la C) et montre à tous qu'il n'y a rien derrière celle-ci (la porte C). Il demande ensuite à Hildebert s'il préfère rester sur son choix ou s'il veut changer.

Hildebert, se disant que cela ne fait aucune différence, reste sur son choix (la porte A). A-t-il raison d'agir ainsi ?

Solution Si Hildebert reste sur son choix, il gagne avec une probabilité de $1/3$. S'il change systématiquement, il gagne avec une probabilité de $2/3$. Hildebert doit donc changer de porte.

4 Variables aléatoires discrètes

Exercice 24 Pour déterminer la note de fin d'année, un professeur procède ainsi : il lance deux dés, et considère la plus petite valeur obtenue. Il définit alors la variable aléatoire N, valant 3 fois la plus petite valeur obtenue.

Décrire la loi de N, puis calculer son espérance et son écart-type.

Solution Notons X la plus petite valeur obtenue sur deux dés équilibrés. Pour établir la loi de X, on fait un tableau avec 6 lignes et 6 colonnes...

On trouve : $\mathbb{P}(X = 6) = 1/36$, $\mathbb{P}(X = 5) = 3/36$, $\mathbb{P}(X = 4) = 5/36$, $\mathbb{P}(X = 3) = 7/36$, $\mathbb{P}(X = 2) = 9/36$, $\mathbb{P}(X = 1) = 11/36$.

On en déduit $\mathbb{E}(X) = \frac{91}{36}$, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{301}{36}$, d'où $\textbf{Var}(X) = \frac{2555}{36^2}$. Comme $N = 3X$, on a donc $\mathbb{E}(N) = 3\mathbb{E}(X) \simeq 7{,}6$ et $\sigma(N) = 3\sigma(X) \simeq 4{,}2$.

Exercice 25 Dans une grande ville, il y a en moyenne un suicide par jour. Combien y a-t-il, en moyenne, de jours de l'année où au moins 5 personnes se suicident ?

Solution Soit X le nombre de suicides un jour donné. Comme il s'agit d'événements rares, X suit une loi de Poisson. Son paramètre m est donné par $m = \mathbb{E}(X) = 1$. On veut donc calculer :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(X = k) = 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \simeq 0{,}003\ 7$$

Il y a donc, en moyenne $0{,}003\ 7 \times 365 \simeq 1{,}35$ jours par an où l'on déplore 5 suicides ou plus.

Exercice 26 Environ 5% des réservations aériennes sur une ligne donnée ne sont pas utilisées, et c'est pourquoi une compagnie vend 100 billets pour 97 places.

Quelle est la probabilité pour que tous les passagers aient une place ? Faire le calcul exact (avec une loi binomiale), et le calcul approché (avec une loi de Poisson).

Solution Soit X le nombre d'annulations ; X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 100, p = \frac{5}{100}\right)$, car on répète 100 fois l'expérience « demander à un passager s'il annule sa réservation », de façon indépendante et car X représente alors le nombre de succès.

Tous les passagers ont une place s'il y a au moins 3 annulations ; la probabilité recherchée est donc :

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant 3\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}\left(X = k\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} \left(\frac{5}{100}\right)^{k} \left(\frac{95}{100}\right)^{100-k} \simeq 88{,}17\%$$

On peut aussi (pour simplifier les calculs) effectuer l'approximation suggerée par l'énoncé : comme $m = np = 5 \leqslant 5$, et que n est « grand », on peut considérer que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(m = 5)$. Alors, la probabilité recherchée est :

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant 3\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}\left(X = k\right) = 1 - \sum_{k=0}^{2} e^{-m} \frac{m^k}{k!} = 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right) \simeq 87{,}53\%$$

Exercice 27 Un microorganisme se reproduit par divisions à intervalles réguliers. Après une division, la division suivante se produit 1 heure après (dans 70% des cas) ou 2 heures après (dans 30% des cas), indépendamment de l'histoire du microorganisme.

On isole un microorganisme, et on note X le nombre de microorganismes présents deux heures après. Décrire la loi de X et calculer $\mathbb{E}\left(X\right)$

Exercice 28 Une information est transmise sous forme de « 0 » ou de « 1 ». L'existence de *bruit* fait qu'au cours du transport, un « 0 » peut être transformé en « 1 », et vice-versa, avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.

On désire transmettre l'information « 1 ». Pour se prémunir du bruit, on transmet trois fois cette information. À la réception, on considérera que l'information est « 1 » s'il y a une majorité de « 1 » dans les trois signaux reçus.

– Quelle est la probabilité que l'information transmise soit correcte ?
– Soit X le nombre de « 1 » dans les trois signaux reçus. Quelle est la loi de X ?

Exercice 29 Dans un village, il y a en moyenne 2 incendies par an. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait plus de 4 incendies dans l'année à venir ?

Exercice 30 (difficile) Casimir a une technique bien particulière pour choisir quel nouveau CD il va acheter. Il commence par choisir un CD au hasard, et l'achète s'il lui plaît, et le repose dans le cas contraire. Or Casimir est difficile — il n'aime que 1% des CDs. Bien sûr, tant qu'il n'a pas trouvé de CD à sa convenance, il recommence l'opération.

– Soit N le nombre de CDs que Casimir regarde avant de se décider. Calculer $\mathbb{P}\left(N = k\right)$.
– On donne les trois formules suivantes, valables pour $p \in]0;1[$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k(1-p) = 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kp^k(1-p) = \frac{p}{1-p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2p^k(1-p) = \frac{p(p+1)}{(1-p)^2}$$

  Calculer $\mathbb{E}\left(N-1\right)$ et $\mathbf{Var}\left(N-1\right)$, puis en déduire l'espérance et l'écart-type de N.
– En fait, Casimir, toujours curieux, lance deux dés quand le CD ne lui plaît pas. S'il obtient deux as, il prend le CD quand même, se disant qu'il y a là un signe. Que vaut maintenant l'espérance de N ?

4.1 Loi binomiale

Exercice 31 Monsieur Duchmol affirme que, grâce à son ordinateur, il peut prédire le sexe des enfants à naître. Pour cette prédiction, il ne demande que 5 Euros, destinés à couvrir les frais de gestion ; de plus, pour « prouver » sa bonne foi, il s'engage à rembourser intégralement en cas de prédiction erronée.

Soit X le gain de monsieur Duchmol ; écrire la loi de probabilité de X.

Si monsieur Duchmol trouve 1 000 naïfs, combien peut-il espérer gagner ?

Solution Notons Y le nombre de prédictions correctes de M. Duchmol. Comme on répète 1000 fois indépendamment l'expérience « tenter une prédiction sur le sexe de l'enfant à naître », expérience qui a une chance sur deux de succès (puisque M. Duchmol n'a pas de recette magique), Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$, et $p = \frac{1}{2}$. Le gain de M. Duchmol vaut $X = 5Y$. On a donc :

$$\mathbb{E}\left(X\right) = 5\mathbb{E}\left(Y\right) = 5np = 2500 \text{ euros}$$

Exercice 32 Monica et Chandler jouent au baby-foot. Monica, plus douée que Chandler au baby-foot, gagne chaque manche avec une probabilité de 80%.

Quelle est la probabilité pour que Monica gagne la partie, i.e. mette 5 buts la première ? Indication : tout se passe comme s'ils jouaient en 9 manches, et la probabilité cherchée est celle que Monica gagne au moins 5 fois.

Solution Un peu plus de 98%.

Solution détaillée On considère que la partie se déroule en 9 manches (quitte à continuer après la défaite de l'un des joueurs), et l'on note X le nombre de victoires de Monica. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 80/100$. De plus, Monica remporte la partie si et seulement si $X \geqslant 5$.

On a donc

$$\mathbb{P}\left(\text{« Monica gagne »}\right) = \mathbb{P}\left(X \geqslant 5\right) = \mathbb{P}\left(X = 5\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(X = 9\right)$$

De plus, on sait que

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Il ne reste plus qu'à faire l'application numérique : on trouve un peu plus de 98% de chances que Monica écrabouille Chandler...

Exercice 33 Alice et Bob jouent aux dés. Normalement, Alice utilise un dé équilibré, mais il lui arrive de tricher, environ une fois sur cent, en utilisant un dé pipé qui sort un as deux fois sur trois. Une fois que la partie est commencée, Alice ne peut plus changer de dé sans que Bob s'en aperçoive.

Sachant qu'Alice a obtenu 9 as sur les 20 derniers lancers, quelle est la probabilité pour que le prochain lancer donne un as ?

Solution $21{,}66\%$, soit une chance sur 4,616.

5 Variables aléatoires continues

Exercice 34 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[-1; 1]$.
- Calculer $\mathbb{P}\left(|X| > \frac{1}{2}\right)$.
- Quelle est la densité de la variable aléatoire $Y = |X|$?

Solution détaillée $|X| > 1/2$ si et seulement si $X > 1/2$ ou $X < -1/2$. De plus, la densité de X est la fonction f constante égale à $\frac{1}{2}$ sur $[-1; 1]$ et nulle ailleurs. Donc :

$$\mathbb{P}\left(|X| > 1/2\right) = \mathbb{P}\left(X < -1/2\right) + \mathbb{P}\left(X > 1/2\right) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

En posant $Y = |X|$, et en refaisant le même calcul que précédemment pour $\mathbb{P}\left(a < Y < b\right)$, on voit trouve $b - a$ pour $0 < a < b < 1$. La densité de Y est donc la fonction $g(x) = 1$ sur $[0; 1]$, puisque l'on a bien $\mathbb{P}\left(a < Y < b\right) = \int_a^b g$

Y suit donc la loi uniforme sur $[0; 1]$.

Exercice 35 Plectrude casse un baton en deux, le point de rupture étant (uniformément) aléatoire.

Quelle est la probabilité pour que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit ?

Solution détaillée On modélise le bâton par le segment $[0; 1]$, et l'on note X le point de rupture. X suit donc une loi uniforme sur $[0; 1]$ (cette hypothèse n'est pas très réaliste, mais comme elle est donnée par l'énoncé...)

Il faut voir que le grand morceau est trois fois plus grand que le petit si et seulement si $X \leqslant 1/4$ ou $X \geqslant 3/4$.

En effet, distinguons deux cas : soit $X \leqslant 1/2$, auquel cas le petit morceau est de longueur X et le grand de longueur $1 - X$. On doit résoudre l'inéquation $1 - X \geqslant 3X$, qui revient à $X \leqslant 1/4$. Donc si $X \leqslant 1/4$, c'est bon, et si $1/4 < X \leqslant 1/2$, le grand morceau n'est pas assez grand.

On fait le même travail dans le cas $X \geqslant 1/2$, ou bien on remarque que c'est la même chose par symétrie.

Ainsi, la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{4} \vee X \geqslant \frac{3}{4}\right) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right) + \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{3}{4}\right)$$

La densité de X étant la fonction f constante égale à 1 sur $[0;1]$, on a donc :

$$\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{3}{4}}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

Finalement, la réponse est donc $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Exercice 36 Boris arrive à un arrêt d'autobus. Sachant qu'il y a en moyenne un autobus toutes les 20 minutes, combien de temps Boris devra-t-il attendre ? *Indication :* Soit X le temps depuis lequel est parti le dernier bus. Montrer que X suit une loi uniforme sur $[0;20]$.

Solution En faisant un petit dessin, on se convainc que X est compris entre 0 et 20, et uniformément réparti entre ces deux valeurs. Le temps d'attente T vaut $T = 20 - X$, donc :

$$\mathbb{E}\left(T\right) = 20 - \mathbb{E}\left(X\right) = 20 - \frac{0+20}{2} = 10 \text{ min}$$

5.1 Loi normale

Exercice 37 Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 13 et d'écart-type 5.

Quelle est la probabilité que $X > 13$? que $X > 18$? que $X < 5$? que $10 < X < 15$?

Solution détaillée On pose $Y = (X - 13)/5$, de sorte que Y suive la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

On a alors $X > 13 \iff (X-13)/5 > 0$, et :

$$\mathbb{P}\left(X > 13\right) = \mathbb{P}\left(Y > 0\right) = \int_0^{+\infty} \phi = \Phi(+\infty) - \Phi(0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

De même, $X > 18 \iff Y > 1$, d'où :

$$\mathbb{P}\left(X > 18\right) = \mathbb{P}\left(Y > 1\right) = \int_1^{+\infty} \phi = \Phi(+\infty) - \Phi(1) = 1 - \Phi(1) \simeq 15.87\%$$

Encore de même, $X < 5 \iff Y < -1.6$, d'où :

$$\mathbb{P}\left(X < 5\right) = \mathbb{P}\left(Y < -1.6\right) = \int_{-\infty}^{-1.6} \phi = \Phi(-1.6) - \Phi(-\infty) = \Phi(-1.6) = 1 - \Phi(1.6) \simeq 5.48\%$$

Toujours de même, $10 < X < 15 \iff -0.6 < Y < 0.4$, d'où :

$$\mathbb{P}\left(10 < X < 15\right) = \mathbb{P}\left(-0.6 < Y < 0.4\right) = \int_{-0.6}^{0.4} \phi = \Phi(0.4) - \Phi(-0.6) = \Phi(0.4) + \Phi(0.6) - 1 \simeq 38.12\%$$

6 Approximation des lois

6.1 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Exercice 38 2% des individus d'une population présentent une certaine mutation.

- Calculer le nombre moyen de mutants dans un échantillon de 100 individus.
- Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun mutant ?
- Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 5 ? Faire le calcul exact (avec une loi binomiale), et le calcul approché (avec une loi de Poisson).

Solution On note X le nombre de mutants dans l'échantillon ; X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$, $p = 2/100$. En effet, tout se passe comme si chaque individu jouait au jeu « Qui veut être un mutant ? », chacun ayant 2% de chances de gagner.

– Le nombre moyen de mutants vaut donc $\mathbb{E}(X) = np = 2$.
– $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{100}{0}(2/100)^0(98/100)^{100}$, soit environ 13%.
– $\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \cdots - \mathbb{P}(X = 4)$. Le calcul exact consiste à remplacer $\mathbb{P}(X = k)$ par son expression d'après la loi (binomiale) de X, i.e. par $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On trouve alors 5.08%.
On peut aussi faire l'approximation $\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{P}(m = np)$, et l'on remplace cette fois-ci $\mathbb{P}(X = k)$ par $e^{-m} \cdot m^k/k!$. On trouve 5.27%.

Exercice 39 Roland de Roncevaux, le 15 août 778, fut attaqué par les Vascons ; avant de périr, il tenta en vain d'avertir le roi à l'aide de son cor[1].

On se propose de répondre à la question suivante : *Quelle est la probabilité que lors de votre dernière inspiration, vous ayez respiré au moins une des molécules que Roland souffla dans son cor 1227 ans plus tôt ? Au moins dix ?*

i. On choisit une molécule au hasard dans l'atmosphère. Quelle est la probabilité p pour qu'elle soit passée par le cor de Roland ?

ii. Soit X le nombre de molécules provenant du cor de Roland que vous avez respirées lors de votre dernière inspiration.

Au vu des grandeurs concernées, on fera l'approximation que les tirages des différentes molécules d'une inspiration sont indépendants — cela revient à dire que, presque certainement, une inspiration ne changera pas la composition de l'atmosphère....

Quelle est alors la loi de X ? On exprimera les paramètres de cette loi en fonction de N et de A.

iii. Calculer l'espérance de X, et interprétez cette valeur.

iv. Bien que l'on ne soit pas dans les conditions usuelles du cours pour effectuer cette approximation, on peut ici légitimement approcher la loi de X par une loi de Poisson de même espérance m. Répondre alors aux questions initiales.

Données :
– Un litre d'air contient en moyenne $N = 2{,}7 \cdot 10^{22}$ molécules.
– Une inspiration fait à peu près un litre d'air.
– Roland, en soufflant dans son cor, a expiré 5 litres.
– L'atmosphère terrestre comporte environ $A = 4 \cdot 10^{21}$ litres d'air.

Solution détaillée i. Il y a 5 litres d'air qui sont passés par le cor de Roland, ce qui correspond à $5N$ molécules ; dans l'atmosphère, il y a AN molécules au total. Donc, si l'on choisit une molécule au hasard dans l'atmosphère, la probabilité p pour qu'elle soit passée par le cor de Roland est de :

$$p = \frac{5N}{AN} = \frac{5}{A} = 1{,}25 \cdot 10^{-21}$$

ii. On choisit $n = N$ molécules d'air ; chacune possède une probabilité p de provenir du cor de Roland. De plus, d'après l'énoncé, on peut supposer que les tirages sont indépendants. Le nombre X de molécules inspirées provenant du cor de Roland suit donc la loi binomiale de paramètres $n = N$ et $p = \frac{5}{A}$.

iii. L'espérance de X est, d'après le cours :

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{5N}{A} = 33{,}75$$

Cela signifie que, *en moyenne*, une inspiration contient 33,75 molécules provenant du cor de Roland.

iv. On considère maintenant que X suit la loi de Poisson de paramètre $m = 33{,}75$. On veut calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1 - e^{-m} \\ &\simeq 99{,}999\,999\,999\,999\,780\ \%\end{aligned}$$

[1]instrument de musique à vent

et également :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 10) &= 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) - \cdots - \mathbb{P}(X=8) - \mathbb{P}(X=9) \\
&= 1 - e^{-m}\Big(1 + m + \frac{m^2}{2} + \cdots + \frac{m^8}{8!} + \frac{m^9}{9!}\Big) \\
&\simeq 99{,}999\ 953\ \%
\end{aligned}$$

Remarque : les calculs directs avec la loi binomiale, bien plus pénibles, donnent les mêmes résultats à 10^{-34} et à 10^{-26} près respectivement ; l'approximation est excellente.

Ainsi, il est quasiment certain que vous ayez respiré au moins une dizaine de molécules d'air provenant du cor de Roland lors de votre dernière inspiration !

Étonnant, non ?

Exercice 40 Harry P., apprenti-sorcier de son état, sort en moyenne deux soirs par semaine. Comme les lendemains matins sont plutôt difficile, il soulage alors ses maux de tête par un sortilège. Cependant, ainsi que Hermione G. l'en avait averti, ce sortilège possède un effet secondaire parfois gênant : une fois sur cent, aléatoirement, le sorcier se retrouve transformé pour la journée en une icône disco, dans son cas un *Village People*.

Quelle est la probabilité que Harry P., sur le cours d'une année entière, se retrouve au moins 3 jours sous cette forme ?

On pourra, après avoir vérifié les conditions, approcher une loi de probabilité par une autre.

Solution détaillée Soit X le nombre de jours, sur une année donnée, où Harry P. se retrouve transformé en un Village People.

Il y a 52 semaines dans une année, donc Harry lance $n = 104$ fois ce sortilège. À chaque fois, et de façon indépendante, il a une probabilité $p = 1/100$ de se transformer. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 104$ et $p = 1/100$.

D'après le cours, comme $n > 30$, $p < 0{,}1$ et $np < 10$, on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $m = np = 1{,}04$ (de sorte que les espérances soient les mêmes).

On a alors, d'après le cours :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-m} \cdot \frac{m^k}{k!} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

Or, on veut calculer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) \\
&= 1 - e^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2}\right) \\
&\simeq 8{,}8\%
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a environ 8,8% de chances pour que cette mésaventure arrive au moins trois fois dans l'année à Harry P., lequel risque d'être fort embarassé...

Remarque : le calcul exact avec la loi binomiale donne 8,7%.

6.2 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Exercice 41 On lance une pièce équilibrée 1000 fois. On veut calculer la probabilité pour que le nombre de « pile » soit compris entre 450 et 550.

- Soit X le nombre de « pile ». Quelle est la loi de X ?
- Écrire la probabilité cherchée. Cette expression est trop longue à calculer ! Il va falloir ruser...
- Quelle est l'espérance μ et l'écart-type σ de X ?
- Montrer que l'on peut approximer X par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
- Il ne reste plus qu'à répondre à la question initiale...

Solution détaillée La loi de X est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 1000; p = \frac{1}{2}\right)$, car on répète 1000 fois, de façon indépendante, une expérience ayant une probabilité de succès de $\frac{1}{2}$, et car X représente alors le nombre de succès.

La probabilité cherchée est, par définition :

$$\mathbb{P}\left(450 \leqslant X \leqslant 550\right) = \sum_{k=450}^{550} \mathbb{P}\left(X = k\right) = \sum_{k=450}^{550} \binom{1000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{1000-k} = \frac{1}{2^{1000}} \sum_{k=450}^{550} \binom{1000}{k}$$

Note : Avec un ordinateur, on peut évaluer cette somme, et l'on trouve 99,861%.

Comme X suit une loi binomiale, son espérance vaut $\mu = np = 500$, et sa variance $\sigma^2 = np(1-p) = 250$, donc $\sigma = 5\sqrt{10}$. En vertu du théorème central limite, on approxime la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$; on est bien ici dans les conditions de l'approximation puisque $np = 500 \geqslant 10$ et $n(1-p) = 500 \geqslant 10$.

Soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X ; sa loi est $\mathcal{N}(0;1)$. Or on a :

$$450 \leqslant X \leqslant 550 \qquad \Leftrightarrow \qquad -50 \leqslant X - \mu \leqslant 50 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\sqrt{10} \leqslant Z \leqslant \sqrt{10}$$

Donc la probabilité recherchée vaut :

$$\mathbb{P}\left(450 \leqslant X \leqslant 550\right) = \mathbb{P}\left(-3{,}2 \leqslant Z \leqslant 3{,}2\right) = \int_{-3,2}^{3,2} \phi = \Phi(3{,}2) - \Phi(-3{,}2) = 2\Phi(3{,}2) - 1 \simeq 99{,}863\%$$

Exercice 42 Au pays des Bisounours, Grobisou[2] décide d'organiser un tournoi de « papier-caillou-ciseau ». La finale oppose Groschéri et Grosjojo (Grosveinard étant absent), et se déroule en 2500 parties. Si l'un d'eux gagne au moins 1300 manches, il remporte le tournoi, sinon ils sont déclarés ex-æquo.

Quelle est la probabilité d'avoir deux vainqueurs ?

Solution détaillée On considère qu'il n'y a pas de manches nulle, c'est-à-dire qu'en cas d'égalité (papier contre papier, par exemple), ils recommencent la manche jusqu'à avoir un vainqueur. Notons X le nombre de victoires de Groschéri. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2500$, et $p = \frac{1}{2}$, car X correspond au nombre de succès si l'on répète 2500 fois, de façon indépendante, l'expérience suivante : « Groschéri gagne une manche de papier-caillou-ciseau ». Groschéri et Grosjojo sont ex-æquo si et seulement si $1200 < X < 1300$. On veut donc calculer $\mathbb{P}\left(1200 < X < 1300\right)$, mais on ne peut pas le faire directement (la formule est trop longue !).

On approche donc, grâce au théorème central limite, la loi de X par une loi normale de paramètre $\mu = np = 1250$, et $\sigma^2 = np(1-p) = 625$, i.e. $\sigma = 25$. On est bien dans les conditions de l'approximation puisque $np = n(1-p) = 1250 > 10$.

On introduit la centrée réduite $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, dont la loi est $\mathcal{N}(0;1)$. On a :

$$1200 < X < 1300 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2 < Z < 2$$

Donc la probabilité cherchée vaut :

$$\mathbb{P}\left(1200 < X < 1300\right) = \mathbb{P}\left(-2 < Z < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 95{,}44\%$$

Remarque : le calcul exact donne 95,23%.

[2] le Bisounours en chef